Physique Générale : Mécanique

07.01: Collisions

Sections
SC, GC & SIE , BA1

Version du 15.11.23

Dr. J.-P. Hogge

Swiss Plasma Center

École polytechnique fédérale de Lausanne

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Aujourd’hui

- Collisions entre deux points matériels
- Choc inélastique
- Choc élastique dans un plan
    - Cas particulier de deux masses égales
- Choc élastique sur un ligne droite
- Propulsion d’une fusée

Collision

<u>Définition:</u> **Collision**
Interaction brève et intense entre deux systèmes.

- Une collision n'implique pas forcément un contact physique.
  - Interaction coulombienne entre les particules
  - Comète qui frôle le soleil

- La notion de brièveté n'est pas strictement nécessaire. Elle permet cependant de considérer un système soumis à des forces extérieures comme isolé pendant un instant qui va de 'juste avant' à 'juste après' la collision. La résultante des forces extérieures n'a alors pas le temps de modifier la quantité de mouvement totale. Cela implique que les forces intérieures peuvent être très intenses
  <u>Exemple:</u> Canne qui frappe une balle de golf.

- 'Bref' peut aller de temps très courts (interaction coulombienne) à des millions d'années (collisions de galaxies).

- Un choc entre deux points matériels ou deux systèmes est caractérisé par un échange de quantité de mouvement, d'énergie, et éventuellement un changement de direction de propagation.

Conservation de la quantité de mouvement

- Avec les hypothèses précédentes (système isolé pendant la collision), les seconde et troisième lois de Newton nous enseignent que la quantité de mouvement du système est conservée.

- Si on considère deux points matériels en interaction:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$ Quantité de mouvement totale

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{1\to 2} + \vec{F}_{2\to 1}$$ Seconde loi de Newton (système isolé)

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$$ Troisième loi de Newton

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{p}_i = \vec{p}_f}$$

Sous la condition que l'effet des forces extérieures est négligeable pendant le choc, la quantité de mouvement est toujours conservée !

Choc élastique

- On distingue plusieurs types de collisions en fonction de la nature des forces internes

<u>Définition:</u> **Collision élastique**
Choc pour lequel les forces internes sont conservatives (= dérivent d'un potentiel).

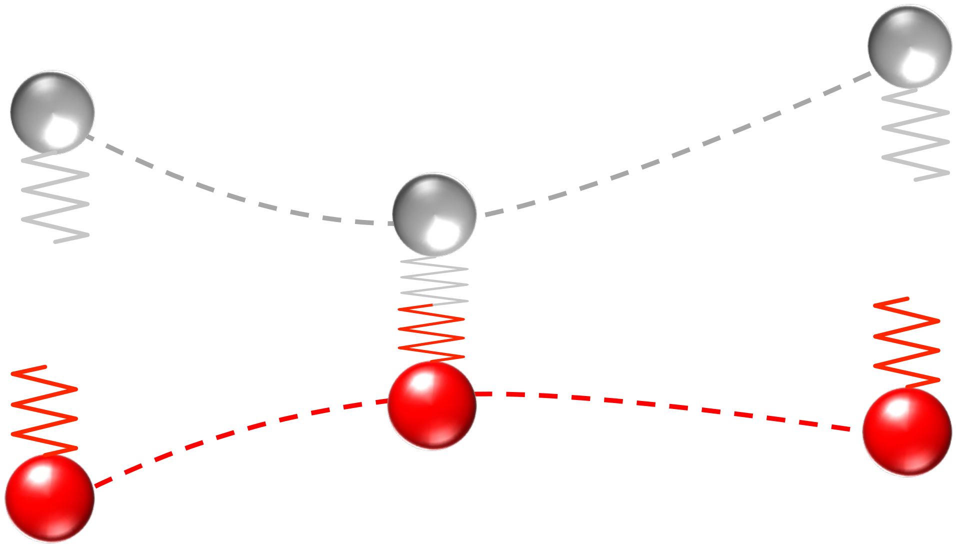
- Lors d'un tel événement, l'énergie mécanique et conservée. Comme il n'y a pas d'interaction dans l'état initial et dans l'état final, $E_{\mathrm{pot}_i} = E_{\mathrm{pot}_f}$ et l'énergie cinétique est conservée !

Choc élastique $\Leftrightarrow$ Conservation de l'énergie cinétique

- Faculté des sciences de base
- Swiss Plasma Center

Chocs élastiques

- Exemple de chocs élastiques:
  - Collisions entre particules chargées (collisions coulombiennes)
  - (Comète qui frôle le soleil)
  - La collision entre deux billes d'acier dur est assimilée à un choc élastique



■ Faculté des sciences de base

■ Swiss Plasma Center

Chocs inélastiques ou chocs mous

<u>Définition:</u> **Collision inélastique**
Choc pour lequel l'énergie cinétique n'est pas conservée

- Une fraction de l'énergie cinétique est transformée en une forme d'énergie autre que potentielle: chaleur ou autre, ou
- De l'énergie stockée dans le systeme sous une certaine forme (chimique, potentielle, masse) se transforme en énergie cinétique.

Choc inélastique $\Leftrightarrow$ **Non-conservation de l'énergie cinétique**

En résumé

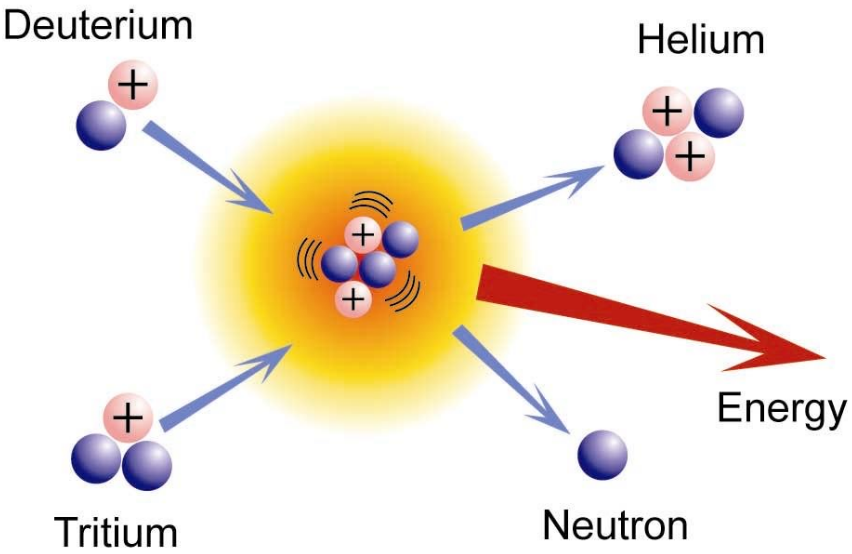
	Energie cinétique	Quantité de mouvement
Chocs élastiques	Conservée	Conservée
Chocs inélastiques	Non conservée	Conservée

■ Faculté des sciences de base

■ Swiss Plasma Center

Exemples de chocs inélastiques

- Exemple de chocs inélastiques:
  - Collisions entre deux boules de pâte à modeler
  - Tartine beurrée qui tombe sur le sol
  - Deux aimants qui s'attirent
  - Fusion entre des noyaux de Deutérium et de Tritium:



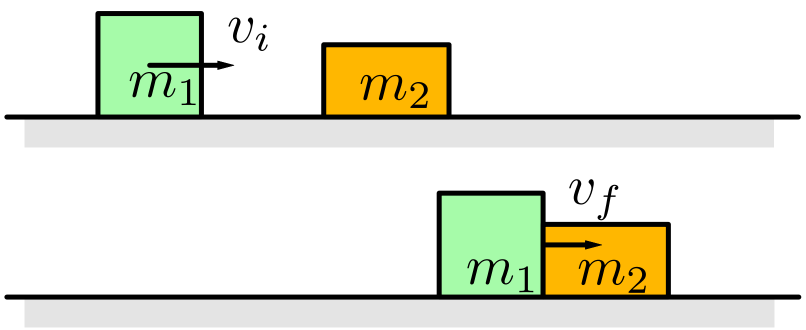
$$m_{\mathrm{D}} + m_{\mathrm{T}} > m_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{n}}$$

Différence de masse : Δm

$$= \Delta m\, c^2$$

Choc parfaitement inélastique

Les masses m_1 et m_2 restent collées après le choc. Pas de frottements.



$$p_i = m_1 v_i + 0$$

$$p_f = (m_1 + m_2) v_f$$

- Conservation de la quantité de mouvement totale:

$$m_1 v_i = (m_1 + m_2) v_f \quad \Longrightarrow \quad v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_i$$

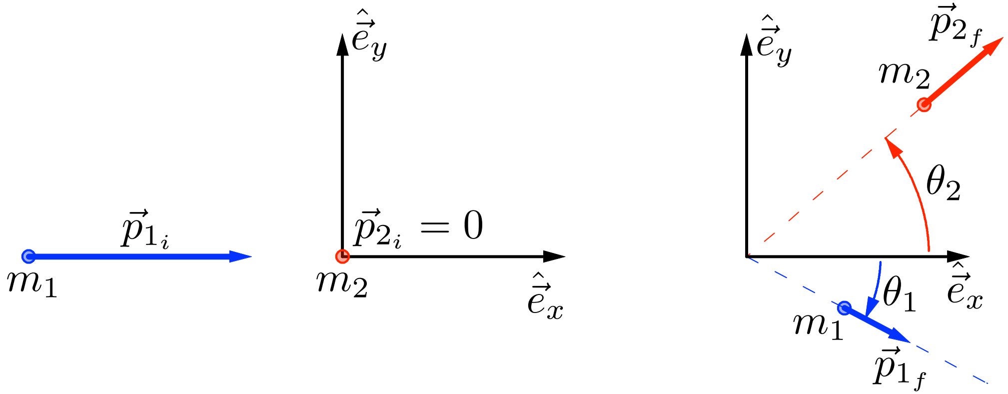
- Energie cinétique:

$$T_i = \frac{1}{2} m_1 v_i^2 \qquad T_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) T_i < T_i$$

- Une partie de l'énergie cinétique a été convertie en chaleur !

Analyse d'une collision élastique en 2D

La masse m_1, de quantité de mouvement initiale $\vec{p}_{1_i} = p_{1_i}\hat{\vec{e}}_x$ subit une collision élastique avec la masse m_2, de quantité de mouvement initiale 0.



- Conservation QM: $\begin{cases} \text{Selon } \hat{\vec{e}}_x : & p_{1_i} = p_{1_f}\cos\theta_1 + p_{2_f}\cos\theta_2 \\ \text{Selon } \hat{\vec{e}}_y : & 0 = -p_{1_f}\sin\theta_1 + p_{2_f}\sin\theta_2 \end{cases}$ 1. 2.
- Conservation E_c: $\frac{p_{1_i}^2}{2m_1} = \frac{p_{1_f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2_f}^2}{2m_2}$ 3.
- 3 équations et 4 inconnues: $p_{1_f}, p_{2_f}, \theta_1, \theta_2$

Analyse d'une collision élastique en 2D

Le problème est sous-déterminé car il manque des informations sur la nature précise de l'interaction. On se limite donc à trouver une relation entre deux grandeurs finales, p.ex. $p_{1_f} = p_{1_f}(\theta_1)$

De 1. et 2. :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (p_{1_i} - p_{1_f}\,\cos\theta_1)^2 & = & +p_{2_f}^2\,\cos^2\theta_2 \\ p_{1_f}^2\,\sin^2\theta_1 & = & p_{2_f}^2\,\sin^2\theta_2 \end{array} \right. \Longrightarrow (p_{1_i} - p_{1_f}\,\cos\theta_1)^2 + p_{1_f}^2\,\sin^2\theta_1 = p_{2_f}^2$$

On remplace $p_{2_f}^2$ dans 3. : $\frac{p_{1_i}^2}{2m_1} = \frac{p_{1_f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2_f}^2}{2m_2}$

$$\frac{p_{1_i}^2}{m_1} = \frac{p_{1_f}^2}{m_1} + \frac{1}{m_2}\left(p_{1_i}^2 - 2p_{1_i}p_{1_f}\cos\theta_1 + p_{1_f}^2\cos^2\theta_1 + p_{1_f}^2\sin^2\theta_1\right)$$

$$p_{1_f}^2\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) - 2p_{1_i}\cos\theta_1\,p_{1_f} + p_{1_i}^2\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{p_{1_f}}{p_{1_i}} = \frac{v_{1_f}}{v_{1_i}} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\left\{\cos\theta_1 \pm \sqrt{\cos^2\theta_1 - \left(1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}\right)}\right\}}$$

■ Faculté des sciences de base

■ Swiss Plasma Center

Analyse d'une collision élastique en 2D:
Cas particulier: $m_1 = m_2$

$$\frac{p_{1_f}}{p_{1_i}} = \begin{cases} 0 \\ \cos\theta_1 \end{cases}$$

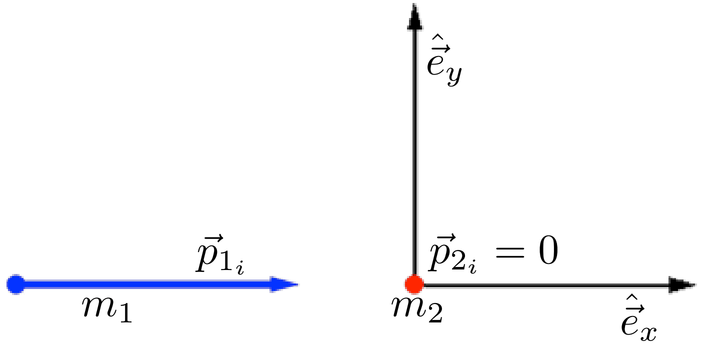
Le premier point matériel s'arrête….

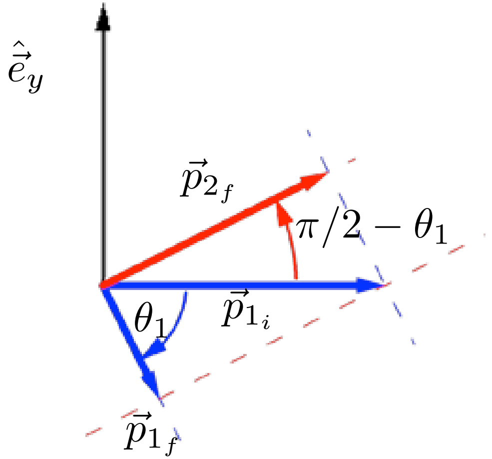
Le premier point matériel part sous un angle θ_1…

$$\frac{p_{2_f}}{p_{1_i}} = \left(1 - 2\frac{p_{1_f}}{p_{1_i}}\cos\theta_1 + \frac{p_{1_f}^2}{p_{1_i}^2}\right)^{1/2} \begin{cases} 1 \\ \sin\theta_1 \end{cases}$$

… et transfère toute sa quantité de mvt au second qui part tout droit

… et le second à 90 degrés par rapport au premier

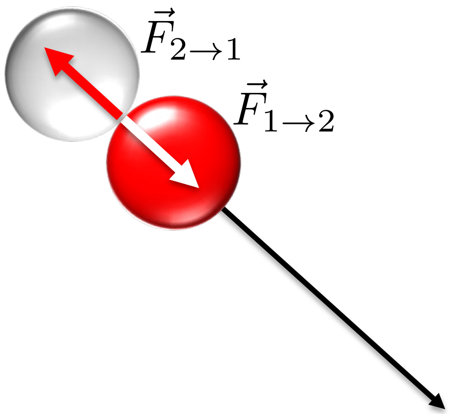




Analyse d’une collision élastique en 2D:
Cas particulier: $m_1 = m_2$: boules de billard

[mooc 12.exp]

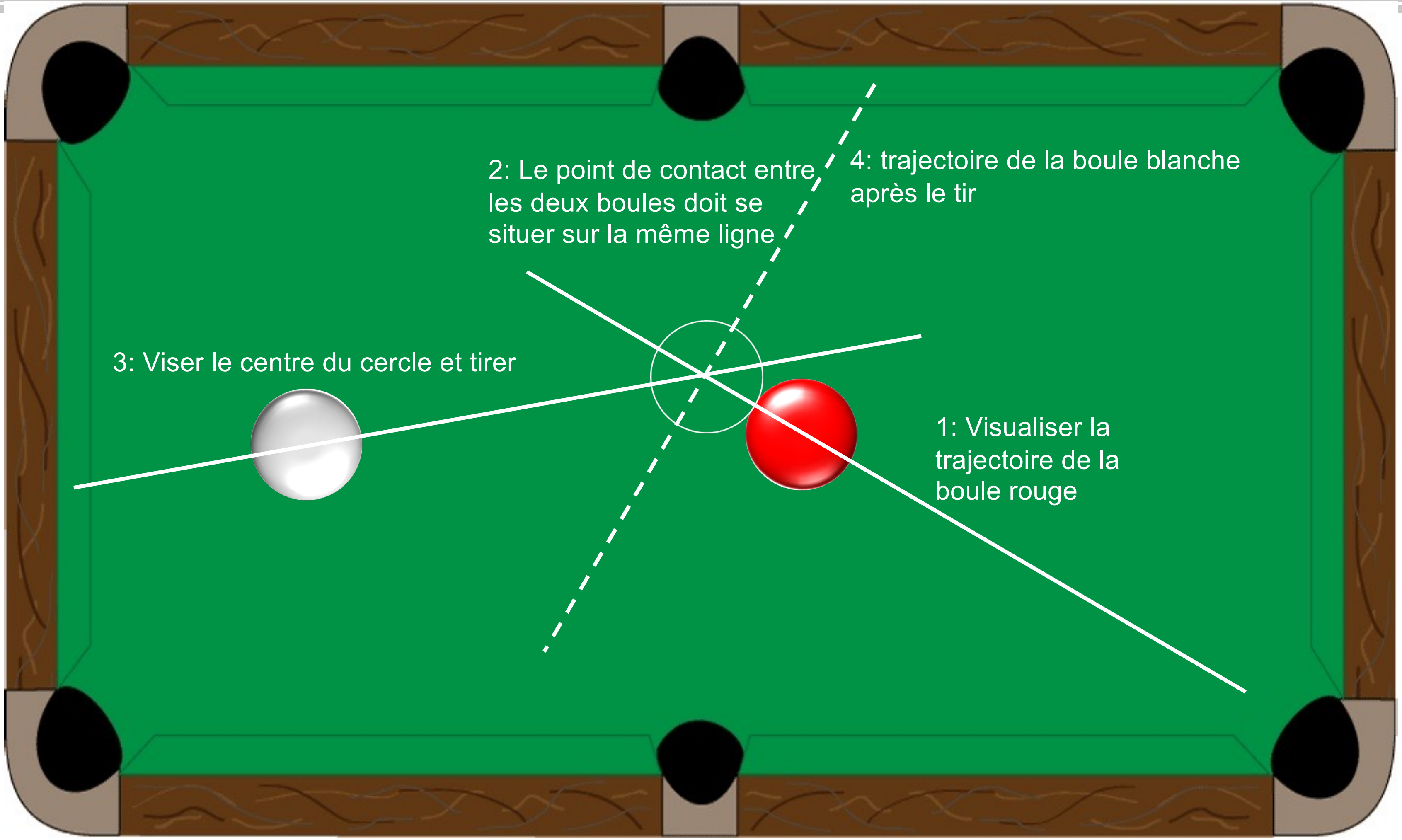
Le choc entre deux boules de billard est très bien décrit par une collision élastique où, pendant le choc, les forces intérieures sont dirigées vers le centre de chaque boule, idéalement représentée par un point matériel.
Si la boule rouge est initialement au repos, sa quantité de mouvement après le choc est parallèle à la force qui a agi sur elle.



Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

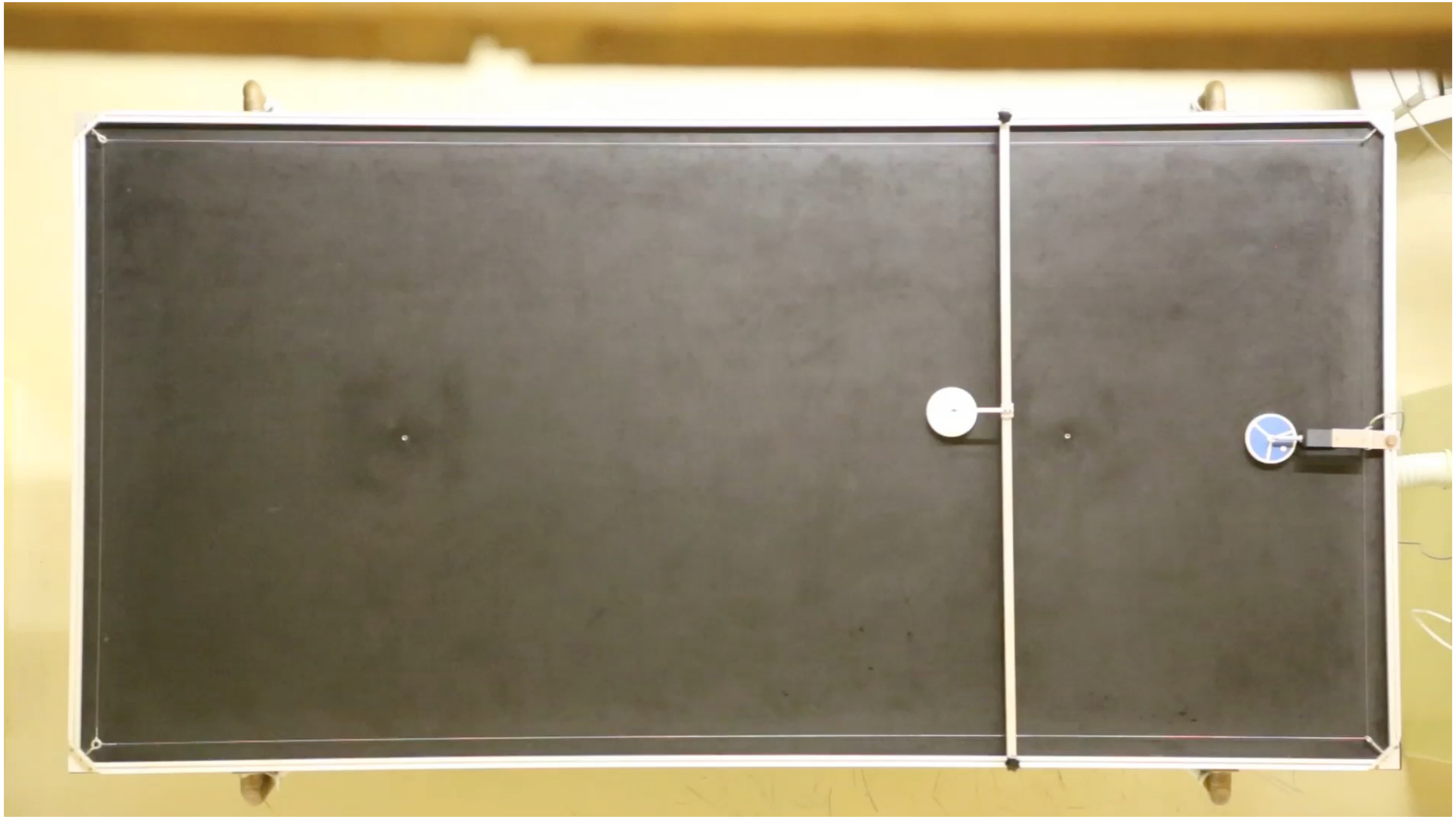
Billard idéalisé.



Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

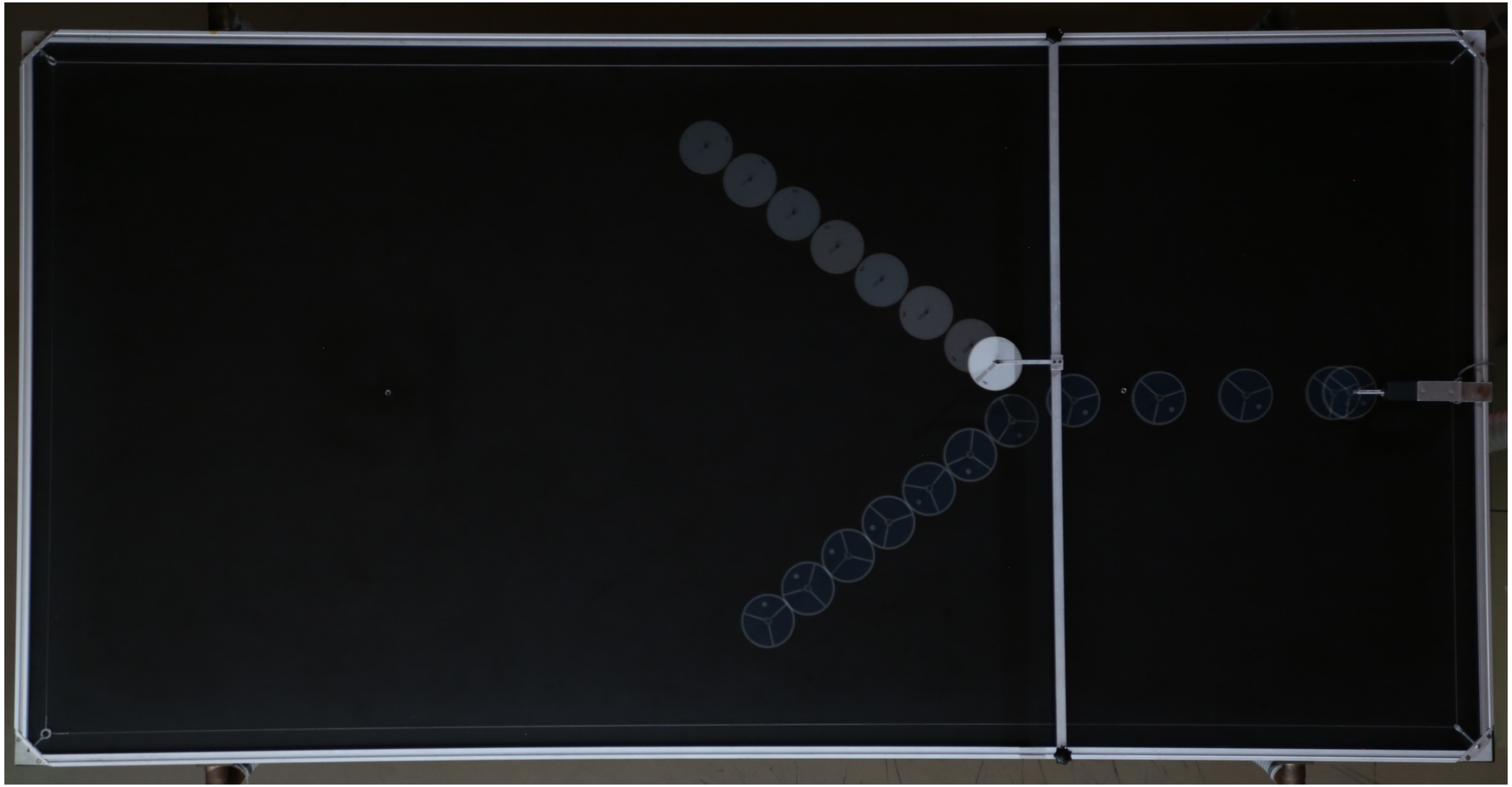
Collision élastique sur une table à air



■ Faculté des sciences de base

■ Swiss Plasma Center

Collision élastique sur une table à air



Pourquoi l'angle entre les deux trajectoires n'est-il pas exactement de 90 degrés?

Collision élastique sur une table à air

- L' approximation que les boules sont des points matériels n'est pas très bonne. Ce sont des solides (= systèmes de points matériels) qui peuvent donc être animés d'une rotation.

- La force d'interaction entre les deux boules n'est pas exactement centrale. Elle inclut un frottement qui est tangentiel à la surface et qui induit une rotation des palets.

- Une partie de l'énergie cinétique de translation se transforme en énergie cinétique de rotation. Il faudrait en tenir compte pour être précis.

Un paradoxe apparent

Une balle magique tombe depuis une hauteur h sur le sol et rebondit en atteignant la même hauteur.

- Comme le choc est élastique, l'énergie cinétique est conservée.
- Comme la force de pesanteur est conservative, l'énergie mécanique est également conservée.
- La quantité de mouvement juste avant et juste après le choc est:

$$\vec{p}_i = -mv\,\hat{\vec{e}}_z \qquad\qquad \vec{p}_f = mv\,\hat{\vec{e}}_z$$

- La quantité de mouvement de la balle n'est donc pas conservée.
- Pourquoi?

Collision très particulière: fusée spatiale, un système à masse variable

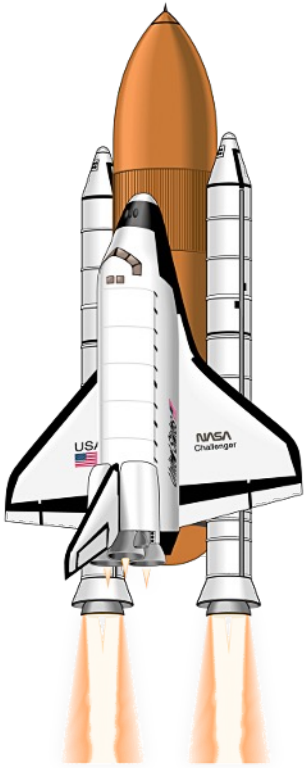
- Les forces internes sont de nature chimique. Elles donnent de l'impulsion a du gaz qui est éjecté de la fusée et cette dernière , par réaction accélère.

- On modélise cette situation par un choc inélastique entre la fusée et le gaz éjecté.

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Fusée spatiale: analyse du problème



- Nous sommes intéressés au mouvement de la fusée.
- Il faut **explicitement tenir compte du fait que sa masse n'est pas constante,** ce qui implique un terme supplémentaire dans la seconde loi de Newton

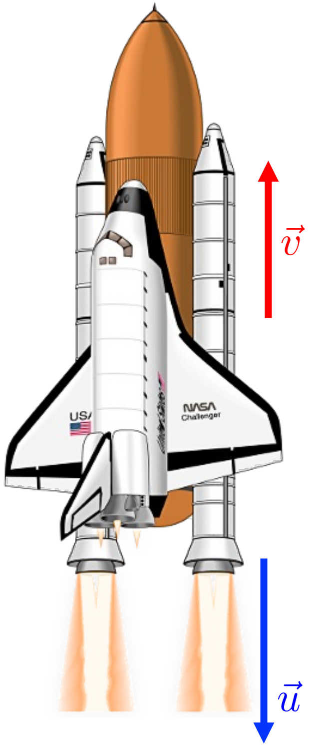
$$\sum \vec{F}^{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}_{\text{f}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m_{\text{f}}(t)\,\vec{v}_{\text{f}}\right) = \underbrace{m_{\text{f}}(t)\,\frac{d\vec{v}_{\text{f}}}{dt}}_{m_{\text{f}}\vec{a}_{\text{f}}} + \underbrace{\frac{dm_{\text{f}}(t)}{dt}\,\vec{v}_{\text{f}}}_{\text{nouveau terme}}$$

- Il faut également tenir compte du fait que la vitesse d'éjection $\vec{u}$ du gaz est mesurée par rapport à la vitesse $\vec{v}$ de la fusée.

<u>Conservation de la quantité de mvt du système (Fusée + gaz éjecté):</u>
La quantité de mouvement emportée par le gaz est égale (et opposée en direction) à la quantité de mouvement gagnée par la fusée.

Fusée spatiale: analyse du problème

- Dans un premier temps, on suppose qu'il n'y a pas de forces extérieures (gravité, frottements), et on calcule la **force de poussée** due à l'éjection de combustible.



	Instant t	Instant t + Δt	Remarque
Masse fusée	m	$m + \Delta m$	$(\Delta m < 0)$
Vitesse fusée	$\vec{v}$	$\vec{v} + \Delta\,\vec{v}$	
Quantité de mouvement fusée	$m\,\vec{v}$	$(m + \Delta\,m)(\vec{v} + \Delta\,\vec{v})$	
Masse de gaz éjectée	–	$-\Delta\,m$	
Vitesse du gaz éjecté (mesurée dans le référentiel du labo)	-	$(\vec{v} + \vec{u})$	
Quantité de mouvement emportée par le gaz	-	$-\Delta m\,(\vec{v} + \vec{u})$	$\lvert\vec{u}\rvert > \lvert\vec{v}\rvert$

Fusée spatiale: force de poussée

- La variation de la quantité de mouvement de la fusée entre t et t+Δt est:

$$\Delta\vec{p}_{\text{fusée}} = (m + \Delta m)\,(\vec{v} + \Delta\vec{v}) - m\vec{v}$$

$$\Delta\vec{p}_{\text{fusée}} = m\Delta\vec{v} + \Delta m\vec{v} + \mathcal{O}(\Delta m\Delta\vec{v})$$

- La quantité de mouvement emportée par le gaz est:

$$\Delta\vec{p}_{\text{gaz}} = -\Delta m\,(\vec{v} + \vec{u})$$

- Comme on a fait l'hypothèse qu'il n'y a pas de force extérieure, la variation de la quantité de mouvement totale est nulle:

$$\Delta\vec{p}_{\text{fusée}} + \Delta\vec{p}_{\text{gaz}} \; = m\Delta\vec{v} - \Delta m\vec{u} = 0$$

- En prenant la limite $\Delta t \to 0$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{u}$$

⇒ La fusée subit une force de poussée $\boxed{\vec{F}_{\text{Poussée}} = \frac{dm}{dt}\vec{u}}$

Fusée spatiale: force de poussée

- Nous sommes passés d'une considération sur le système (fusée + gaz) à l'établissement d'une force qui agit sur la fusée seule. On peut donc repasser au cas où les forces extérieures ne sont pas nulles (nous considérons ici la gravité seule, mais il pourrait aussi y avoir des forces de frottements).

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{Poussée}} = m\vec{g} + \frac{dm}{dt}\vec{u}$$

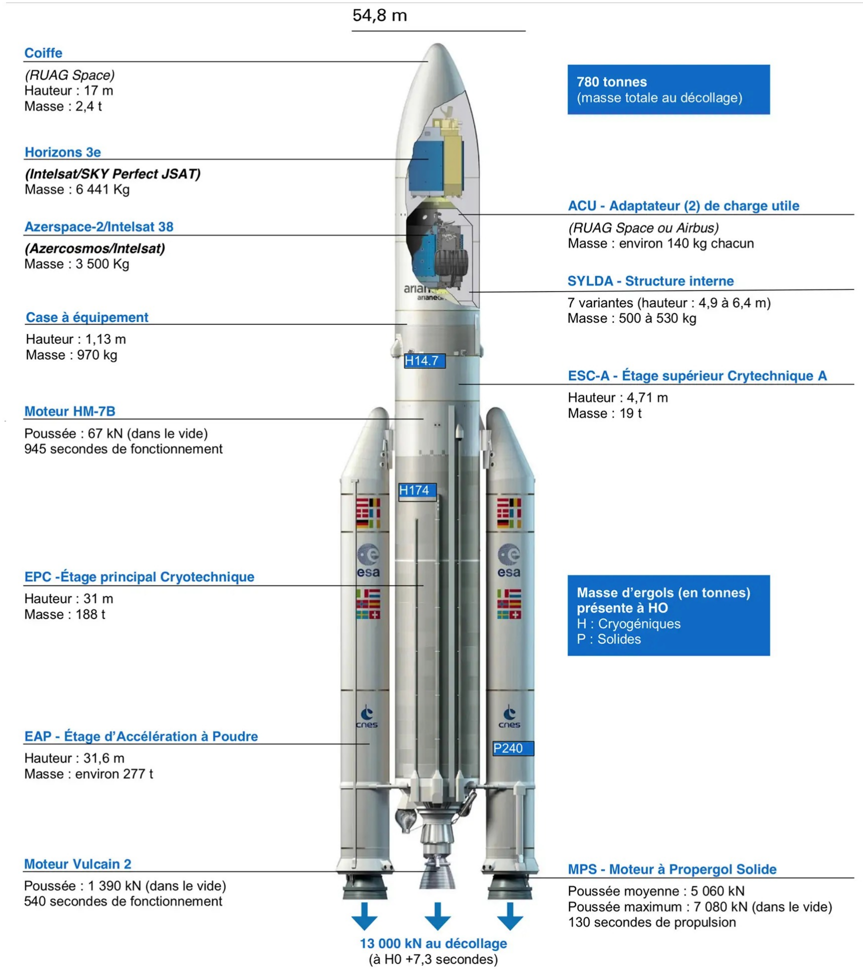
- On projette sur un axe vertical et on procède par séparation des variables (on pose $t_0=0$, $v(0)=0$):

$$dv = -g\,dt - u\,\frac{dm}{m} \qquad \int_{v(0)}^{v(t)} dv' = -g\int_0^t dt' - u\int_{m(0)}^{m(t)} \frac{dm'}{m'}$$

- D'où on trouve la vitesse en function du temps

$$\boxed{v(t) = -gt - u\,\ln\frac{m(t)}{m(0)}}$$

Modèle simplifié du départ d'Ariane 5



- Poids total au décollage: 780 tonnes
- Charge utile (env. 10 tonnes)
- Le décollage est assuré par les boosters et le moteur Vulcain2

- Boosters (2x):
  - Poids à vide: 37 tonnes
  - Poids total du carburant en poudre: 240 tonnes
  - Temps de combustion: 132 s
  - Poussée (au décollage) 6000 kN/unité

- Moteur Vulcain 2:
  - Poids à vide: 14 tonnes
  - Poids du carburant: 174 tonnes)
  - Temps de combustion: env. 15 minutes
  - Poussée: 1390 kN

- Après avoir utilisé leur carburant, les boosters se détachent à environ 60 kM d'altitude

https://ariane5.cnes.fr/fr/caracteristiques-techniques
https://fr.wikipedia.org/wiki/Ariane_5
http://www.capcomespace.net/dossiers/espace_europeen/ariane/ariane5/moteur_MPS.htm

Hypothèses (très simplificatrices):

- Toute la poussée est fournie par les boosters (en vrai ~90%)
- On est dans le vide
- g = cste

On obtient des ordres de grandeur

$$v(t) = -gt - u \ln \frac{m(t)}{m(0)}$$

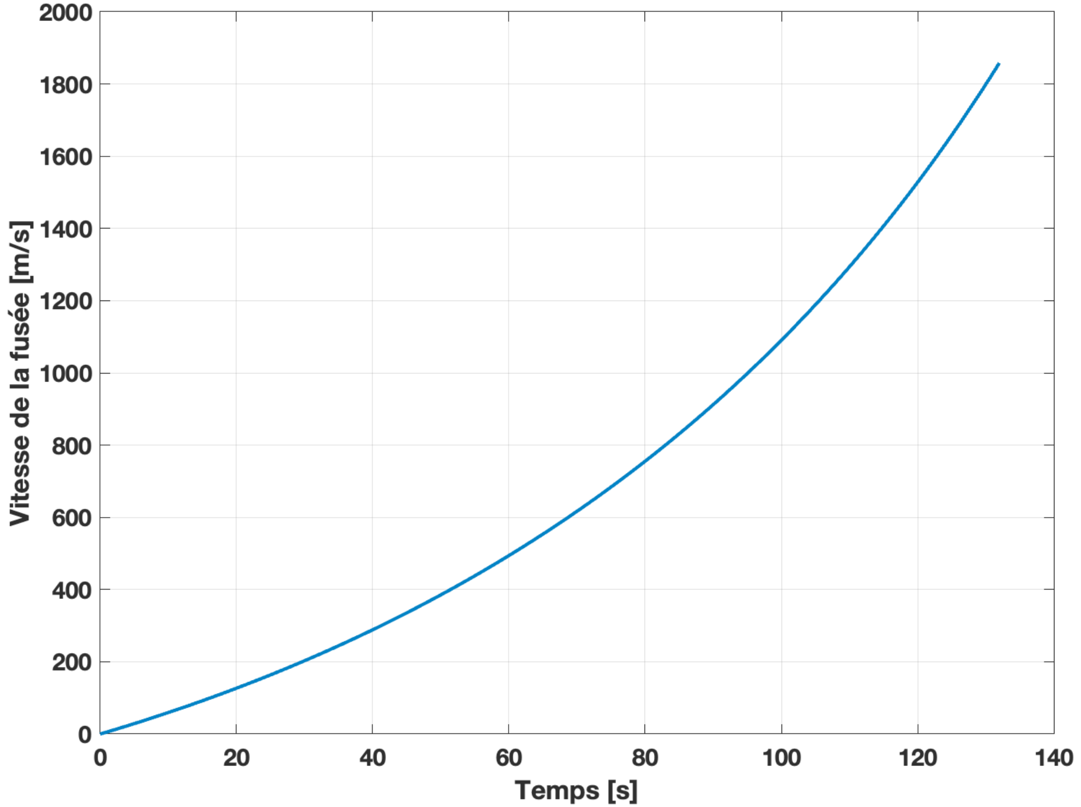
$$m(0) = 780'000[\mathrm{kg}]$$

$$m(t) = m(0) - \frac{480'000}{132} t \quad [\mathrm{kg/s}]$$

$$\vec{F}_{\text{Poussée}} = \frac{dm}{dt}\vec{u} \quad \Longrightarrow \quad u = F_{\text{Poussée}} \Big/ \left(\frac{dm}{dt}\right) = \frac{12'000'000 * 132}{480'000} = 3300 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center



- La vitesse d’expulsion des gaz est de l’ordre de quelques km/s
- Lors du détachement des boosters, la vitesse de la fusée est de l’ordre de 2km/s

Résumé

- Une collision consiste en une interaction brève et intense entre deux systèmes.
- Collision élastique:
  L'énergie cinétique **et** la quantité de mouvement sont conservées.
- Collision inélastique:
  Seule la quantité de mouvement est conservée.
- Système à masse variable (fusée): La force de poussée s'obtient en faisant un bilan sur la quantité de movement totale.